

स्थिति 3: $a = 3q + 2$

$$a^2 = (3q + 2)^2 = 9q^2 + 12q + 4 = 3(3q^2 + 4q + 1) + 1$$

यह भी $3m + 1$ के रूप में है, जहाँ $m = 3q^2 + 4q + 1$

अतः किसी भी धनात्मक पूर्णांक a का वर्ग या तो $3m$ के रूप का होता है या $3m + 1$ के रूप का होता है, जहाँ m कोई पूर्णांक है।

प्रश्न 5. यूक्लिड विभाजन प्रमेय का प्रयोग करके दर्शाइए कि किसी धनात्मक पूर्णांक का घन $9m$, $9m + 1$ या $9m + 8$ के रूप का होता है।

उत्तर:

हम यूक्लिड विभाजन प्रमेय का उपयोग करेंगे। कोई भी धनात्मक पूर्णांक a को 3 से विभाजित करने पर तीन शेषफल में से एक मिलेगा: 0, 1, या 2

इस प्रकार, किसी भी धनात्मक पूर्णांक a को निम्नलिखित तीन रूपों में से एक रूप में लिखा जा सकता है: $a=3q$,

$$a=3q+1, \quad a=3q+2$$

जहाँ q कोई पूर्णांक है। अब, हम इन तीनों स्थितियों के घन निकालेंगे और दिखाएंगे कि वे या तो $9m$ के रूप में हैं या $9m+1$ के रूप में हैं या $9m+8$ के रूप में हैं।

स्थिति 1: $a=3q$

$$a^3 = (3q)^3 = 27q^3 = 9(3q^3)$$

यह $9m$ के रूप में है, जहाँ $m=3q^3$

स्थिति 2: $a=3q+1$

$$a^3 = (3q+1)^3 = 27q^3 + 27q^2 + 9q + 1 = 9(3q^3+3q^2+q)+1$$

यह $9m+1$ के रूप में है, जहाँ $m=3q^3+3q^2+q$

स्थिति 3: $a=3q+2$

$$a^3 = (3q+2)^3 = 27q^3 + 54q^2 + 36q + 8 = 9(3q^3 + 6q^2 + 4q)+8$$

यह $9m+8$ के रूप में है, जहाँ $m=3q^3 + 6q^2 + 4q$

अतः किसी भी धनात्मक पूर्णांक a का घन या तो $9m$ के रूप का होता है, $9m+1$ के रूप का होता है, या $9m+8$ के रूप का होता है, जहाँ m कोई पूर्णांक है।